



平均场加对相互作用模型的 代数解方法及其应用

关鑫

辽宁师范大学 大连



内容简介

- 平均场理论： **Hartree-Fock (HF)** 自洽场；
 唯象平均场 \rightarrow 球形壳模型； **Nilsson** 形变壳模型；
 \rightarrow 相对论平均场理论模型；
- 剩余相互作用： \rightarrow 短程：对力相互作用
 \rightarrow 长程：四极-四极相互作用
- 平均场加对力相互作用的求解方法：
 平均场加标准对力模型的 **BCS** 近似；
 平均场加标准对力模型的代数解方法： **Richardson-Gaudin** 方法

Heine-Stieltjes 多项式方法

简化计算过程 

Xin Guan, Kristina D. Launey, Mingxia Xie, Lina Bao, Feng Pan,
and Jerry P. Draayer, *Phys. Rev. C* 86 (2012) 024313



研究背景

■ 对关联现象:

对关联现象普遍地存在于相互作用费米子系统中，
超导系统，冷原子系统以及原子核系统 ...

■ BCS 理论: 超导体中的电子配对现象. (*Phys. Rev.* 108 (1957) 1175)

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 110, NUMBER 4

MAY 15, 1958

Possible Analogy between the Excitation Spectra of Nuclei and Those of the Superconducting Metallic State

A. BOHR, B. R. MOTTELSON, AND D. PINES*

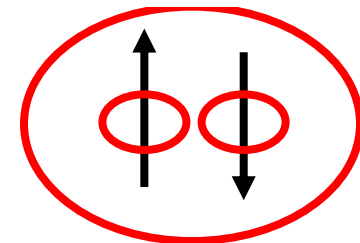
Institute for Theoretical Physics, University of Copenhagen, Copenhagen, Denmark, and Nordisk Institut for Teoretisk Atomfysik, Copenhagen, Denmark

(Received January 7, 1958)

The evidence for an energy gap in the intrinsic excitation spectrum of nuclei is reviewed. A possible analogy between this effect and the energy gap observed in the electronic excitation of a superconducting metal is suggested.

■ 最早将BCS理论应用到核物理中

(*Balyaev, Mat. Fys. Medd.* 31 (1959)11)





研究背景

■ Hartree–Fock–Bogolyubov (HFB)

BCS 理论的一种改进方案，其本质是相同的。

(A . L. Goodman, *A dv. Nucl. Phys.* 11, 263 (1979).)

BCS 和 HFB 近似存在粒子数不守恒的问题。

■ Richardson-Gaudin 精确解方法： 求解非线性方程组

(*Phys. Lett.* 3 (1963) 277; 5 (1963) 82; *Nucl. Phys.* 52 (1964) 221; 52 (1964)253)

存在的问题： 轨道数和价核子对数都很大时，非线性方程组的求解变得十分困难。

核心工作： 提出推广 Heine-Stieltjes 多项式方法，从而克服 Richardson-Gaudin 方法存在的计算困难问题，实现 Richardson-Gaudin 理论的最终目标。



一般对力问题的哈密顿量

$$\hat{H} = \sum_j \epsilon_j \hat{n}_j - \sum_{jj'} G_{jj'} S_j^+ S_{j'}^-$$

$$\hat{n}_j = \sum_m a_{jm}^\dagger a_{jm} \quad S_j^+ = \sum_{m>0} (-)^{j-m} a_{jm}^\dagger a_{j-m}^\dagger$$

$$\Omega_j = j + 1/2 \quad S_j^- = \sum_{m>0} (-)^{j-m} a_{j-m} a_{jm}$$

近似的情况下:

$$G_{jj'} = \begin{cases} G \quad \forall j, j' \\ G_j G_{j'} \end{cases}$$

常数对力强度

可分离对力强度

$$G_{\alpha\beta} = A e^{-B(\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta)^2}$$

依赖轨道的高斯型对力强度



标准对力模型

标准对力模型哈密顿量 对力模型哈密顿量:

考虑的单粒子能级的总数

对力强度

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^n \epsilon_j \hat{n}_j - G \sum_{jj'} S_j^+ S_{j'}^-$$

第 j 轨道的价核子数算符

第 j 轨道的单粒子能量

$$\hat{n}_j = \sum_m a_{jm}^\dagger a_{jm}$$

对产生算符

$$S_j^+ = \sum_m (-)^{j-m} a_{jm}^\dagger a_{j-m}^\dagger \quad (S_j^- = (S_j^+)^\dagger)$$

$$[S^+, S^-] = \frac{1}{2}(2\hat{n} - \Omega) \equiv 2S_0, \quad [S_0, S^\pm] = \pm S^\pm, \quad \Omega = \sum_j 2j + 1$$



标准对力模型的代数解方法

根据 **Richardson-Gaudin** 方法, k 对价核子激发的本征态可以表示为:

$$|k; \xi\rangle = S^+(x_1)S^+(x_2)S^+(x_3)\cdots S^+(x_k)|0\rangle$$

对真空态

$$S^-|0\rangle = 0$$

待定参数 x_i 满足以下的 **Bethe ansatz** 方程 (BAEs):

$$1 - 2G \sum_j^n \frac{\rho_j}{x_i - 2\epsilon_j} - 2G \sum_{p(\neq i)}^k \frac{1}{x_i - x_p} = 0$$

$$E_{n,k} = \sum_{i=1}^k x_i \quad \rho_j = -(j + 1/2) / 2$$

问题是如何求解 BAEs



Heine-Stieltjes 多项式方法

当一组正交的多项式 $y(x)$ 满足以下的二阶 Fuchsian 微分方程

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) - V(x)y(x) = 0$$

这里 $A(x) = \prod_{j=1}^n (x - 2\epsilon_j)$ 为 n 阶多项式 $y(x) = \prod_{j=1}^k (x - x_j)$

$$B(x) / A(x) = \sum_{j=1}^n \frac{2\rho_j}{x - 2\epsilon_j} - \frac{1}{G}$$

多项式 $y(x)$ 的零点

Bethe ansatz 方程:

$$1 - 2G \sum_j \frac{\rho_j}{x_i - 2\epsilon_j} - 2G \sum_{j(\neq i)} \frac{1}{x_i - x_j} = 0$$



求解 BAEs 的问题转化为求多项式 $y(x)$ 的零点问题

G. Stieltjes, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, vol. 23, AMS, 1975
T. J. Stieltjes, *Contra. Acad. Sci. Paris* 100 (1885) 439; 620
E. B. Van Vleck, *Bull. Amer. Math. Soc.* 4 (1898) 426.

T J Stieltjes



Heine-Stieltjes 多项式方法

$$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) - V(x)y(x) = 0$$

假设与上式相对应的多项式 $y(x)$, $V(x)$ 的形式如下

待定系数

$$y(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j \quad V(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$$

将 $y(x)$ 与 $V(x)$ 以及 $A(x)$, $B(x)$ 代入到上面的二阶 **Fuchsian** 方程中，耦合出两个代数方程：

$$Fv = b_0 v$$

$$Pv = 0,$$

这里 $v = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$

$(k+1) \times (k+1)$

$(n-1) \times (k+1)$

将 $\{b_1, \dots, b_{n-1}\}$ 用 $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ 表示。

求解 $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$

和 b_0

将求解 BAEs 问题转化为求解两个耦合矩阵方程，简化计算过程



Heine-Stieltjes 多项式方法

如果取多项式 $y(x)$ 中的系数 $a_k = 1$ 这时，展开系数 a_{k-1} 的值可用 $y(x)$ 的零点之和表示，这时激发态的能量可表示为：

$$E_{n,k} = -a_{k-1} = \sum_{i=1}^k x_i$$

对力能隙：四点的差分公式

$$\Delta_{nn} \equiv \frac{1}{4} (BE(Z, N-2) - 3BE(Z, N-1) + 3BE(Z, N) - BE(Z, N+1))$$

对力能隙的均方差：

$$\sigma = \sqrt{\sum_{\mu=1}^N (\Delta_{\mu}^{th} - \Delta_{\mu}^{exp})^2 / N}$$



Ni 同位素

$$f_{5/2} p_{1/2,3/2} g_{9/2}$$

$$\epsilon_{3/2} = -1.68 \text{ MeV} \quad \epsilon_{1/2} = -0.57 \text{ MeV}$$

$$\epsilon_{5/2} = -0.91 \text{ MeV} \quad \epsilon_{9/2} = 1.33 \text{ MeV}$$

经验公式

$$G_{Ca} = 16 / A \text{ MeV}$$

$$G_{Ni} = 23 / A \text{ MeV}$$

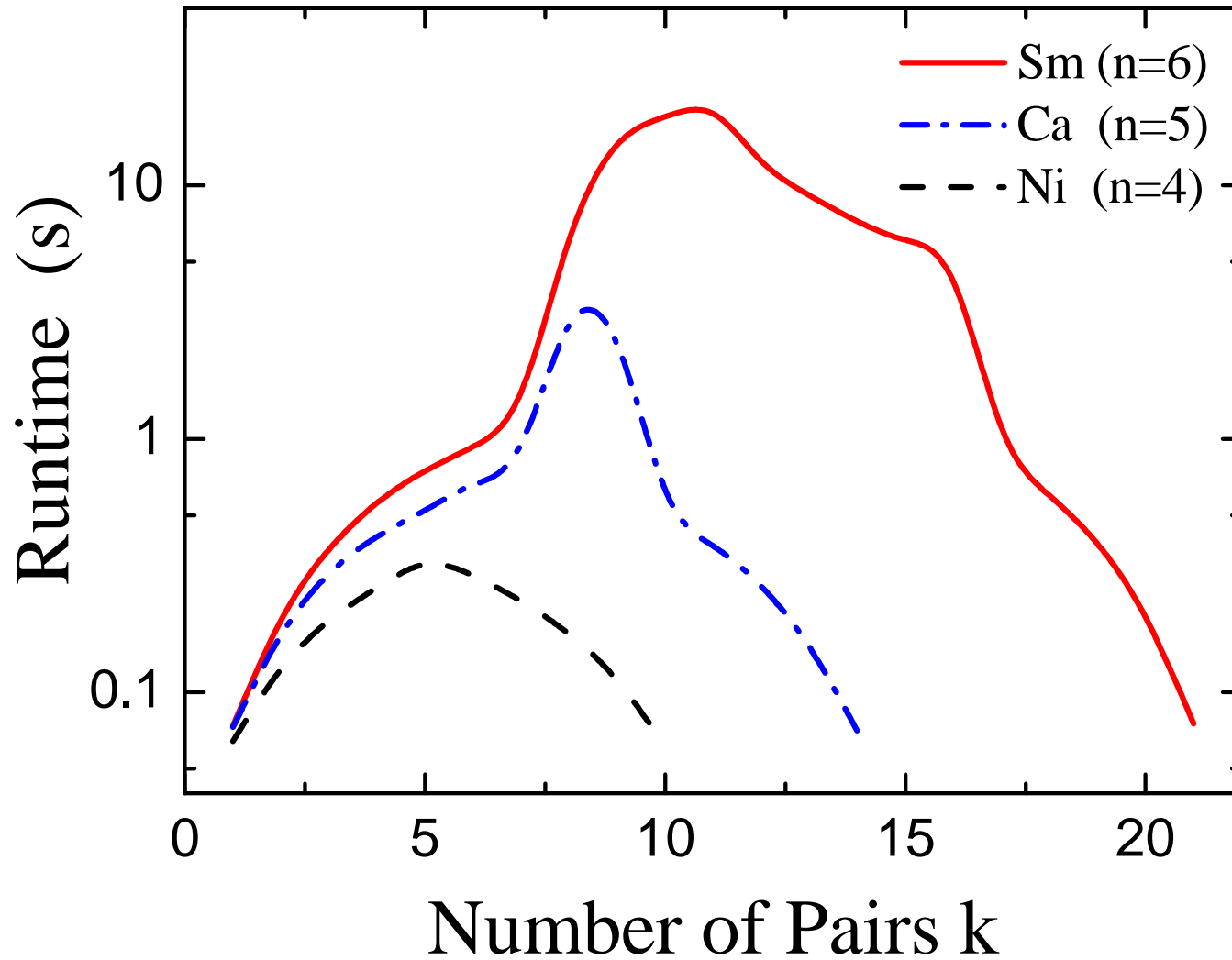
$$G_{Sm} = 24 / A \text{ MeV}$$

Ca 同位素

$$f_{5/2,7/2} p_{1/2,3/2} g_{9/2}$$

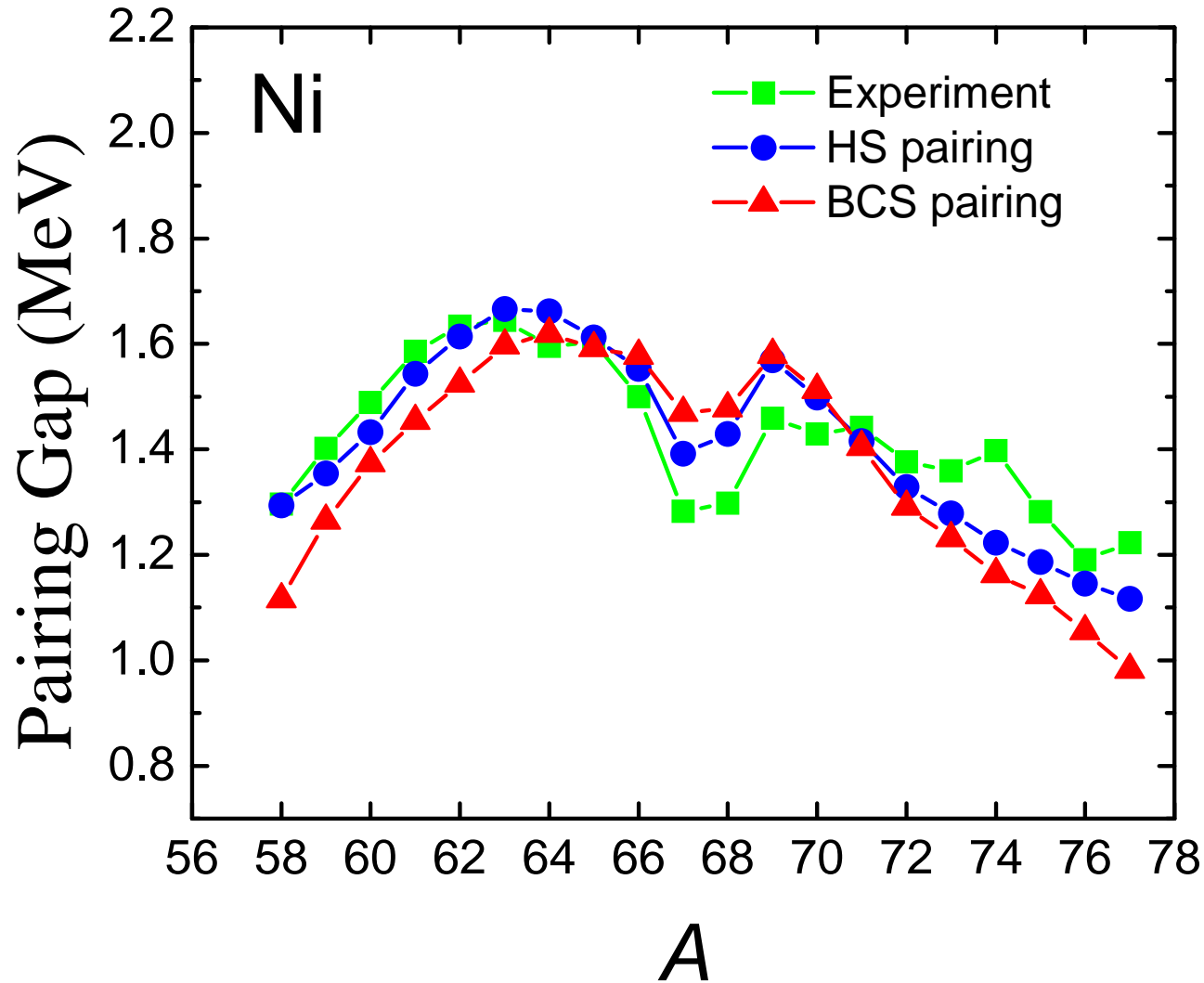
TABLE II: Root-mean-square deviations σ (in MeV) of the theoretical pairing gaps as compared to the experimental values for the $^{42-49}\text{Ca}$, $^{58-77}\text{Ni}$, and $^{146-153}\text{Sm}$ isotopes.

Isotopes	σ (MeV)	
	“HS Pairing”	“BCS Pairing”
$^{42-49}\text{Ca}$	0.155	0.210
$^{58-77}\text{Ni}$	0.079	0.137
$^{146-153}\text{Sm}$	0.364	

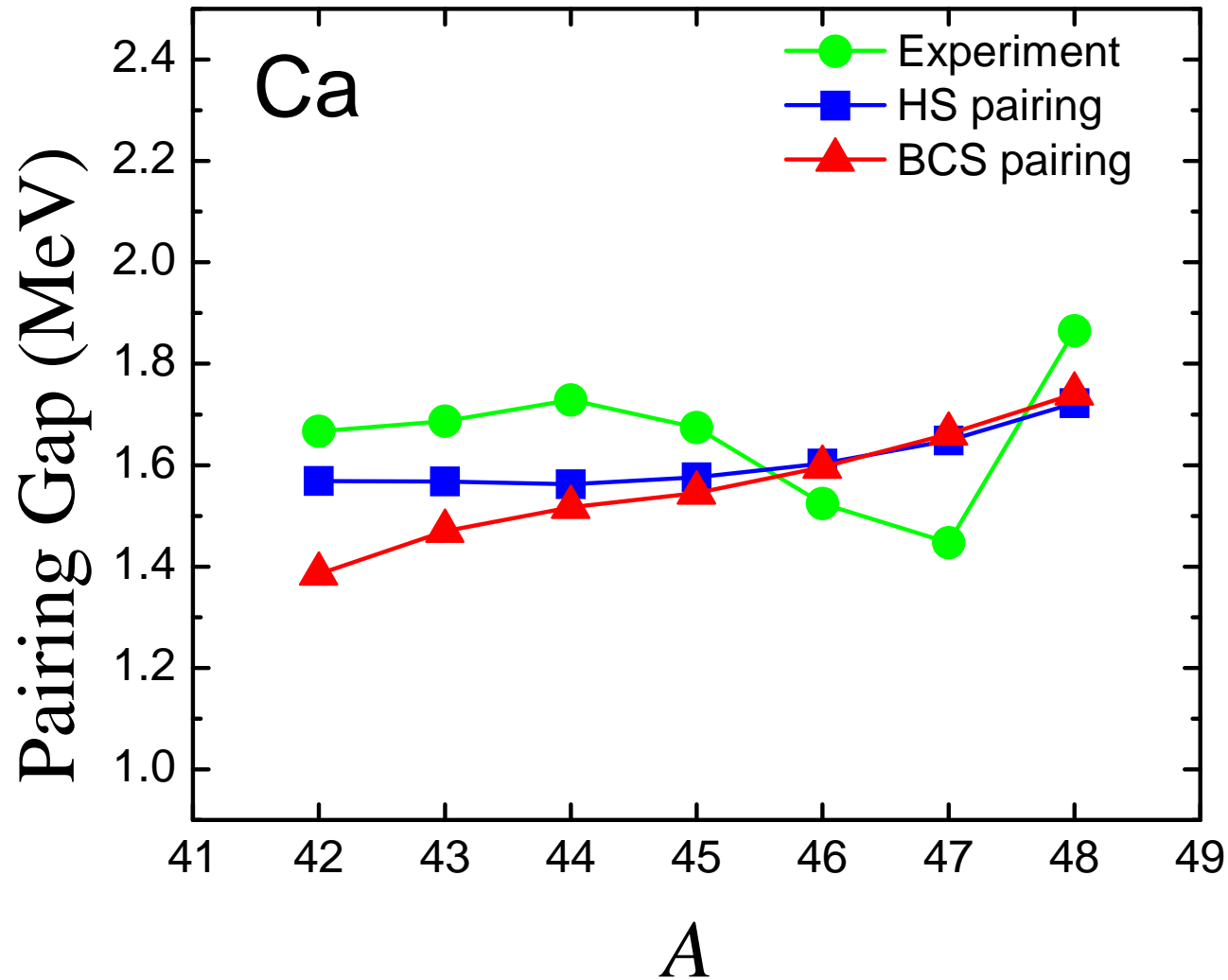


计算时间短

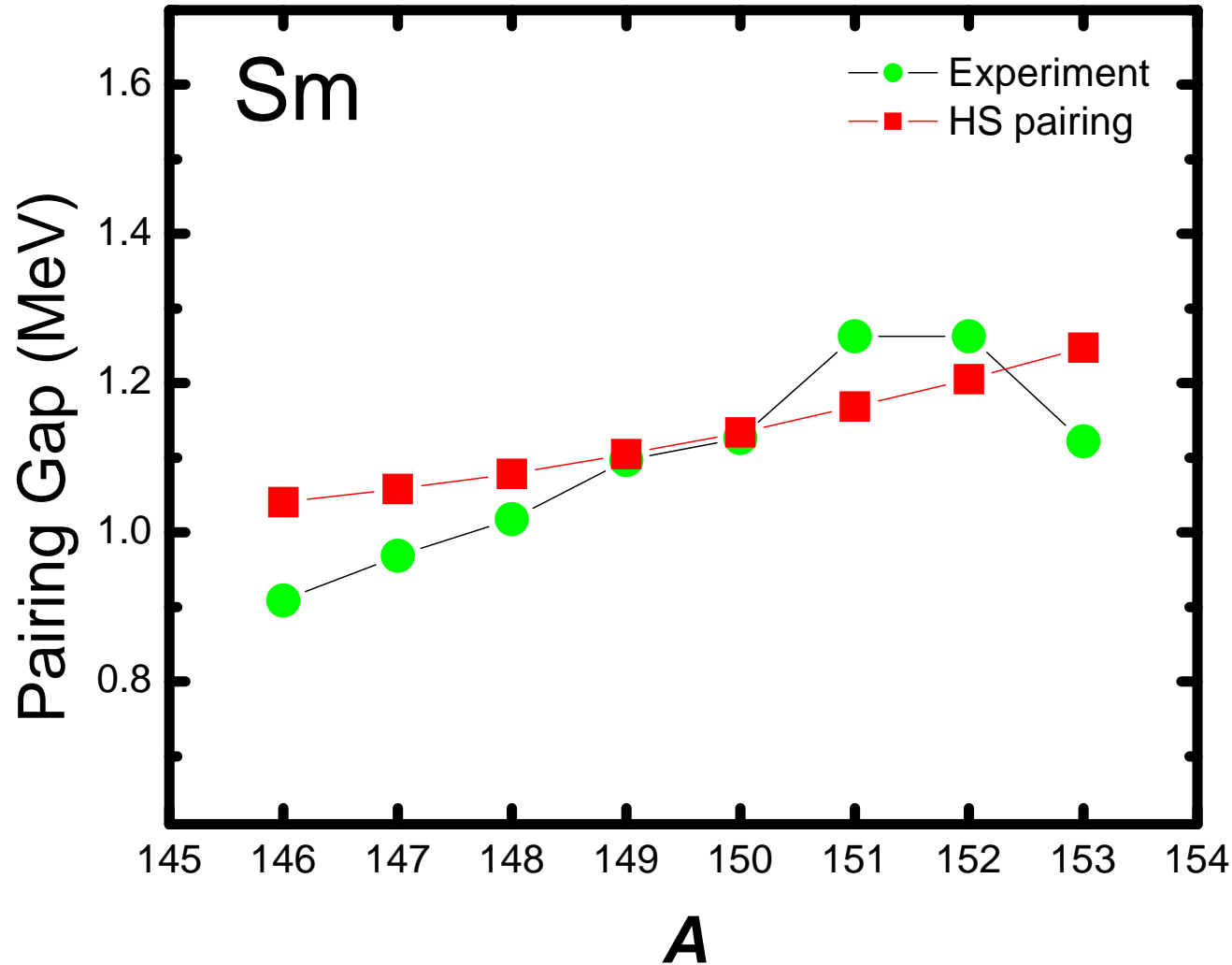
(Xin Guan, Kristina D. Launey, Mingxia Xie, Lina Bao, Feng Pan, and Jerry P. Draayer, *Comp. Phys. Comm.* 185 (2014) 2714)



“HS”多项式方法所得到的结果与实验值符合的较好。



“HS”多项式方法所得到的结果与实验值符合的较好。



“HS”多项式方法可应用于轨道数和价核子对数都较大的复杂核系统



总结

- 我们建立了一种新的基于推广的**Heine-Stieltjes** 多项式方法求解标准对力模型的代数方法。
- 我们利用该方法求解球形平均场加标准对力模型并计算了 **Ca, Ni, Sm** 同位素的中子能隙, 通过与实验结果及 **BCS** 方法所得到的结果相比较, 可以证实球形平均场加标准对力模型精确解能够较好地描述这些同位素的对力能隙。
- 其中的计算过程和结果进一步证明推广的 **Heine-Stieltjes** 多项式方法, 对于处理轨道数和价核子数较多的体系都是适用的。
- 总的说来, 本文只是平均场加对相互作用模型及其应用的初步工作. 对于球形核, 还需要考虑四极-四极相互作用修正及中子-质子间的相互作用。



- 利用推广的**HS**多项式方法来求解球形平均场加标准对力模型并该模型能谱统计性质的分析。 (*Xin Guan, Kristina D. Launey, Jianzhong Gu, Feng Pan, and Jerry P. Draayer, Phys. Rev. C 86 (2012) 024313*)
- 应用推广的**HS**多项式方法严格求解 **Nilsson** 形变平均场加标准对力模型, 并利用该模型系统地对大形变核素进行描述。
- 在此基础上, 分析形变平均场模型框架下由形变平均场与对力相互作用竞争所导致的量子相变行为和临界现象;
 - 分析模型中由对力驱动的量子相变行为及与单粒子能级间隔、四极形变大小、对力强度的依赖关系。
 - 重点揭示实验可观测物理量, 如结合能, 奇偶能差, 转动惯量等作为有效序参量所能展示的量子相变行为, 从而探索由对力驱动量子相变的实验证据。



展 望

Thank You !

举个例子：

BAEs:

$k=2$; $n=5$; $n=8$; $n=10$

1.7s; 8.0s; 26.0s

$k>3$; hours

(loss of precision)

HS:

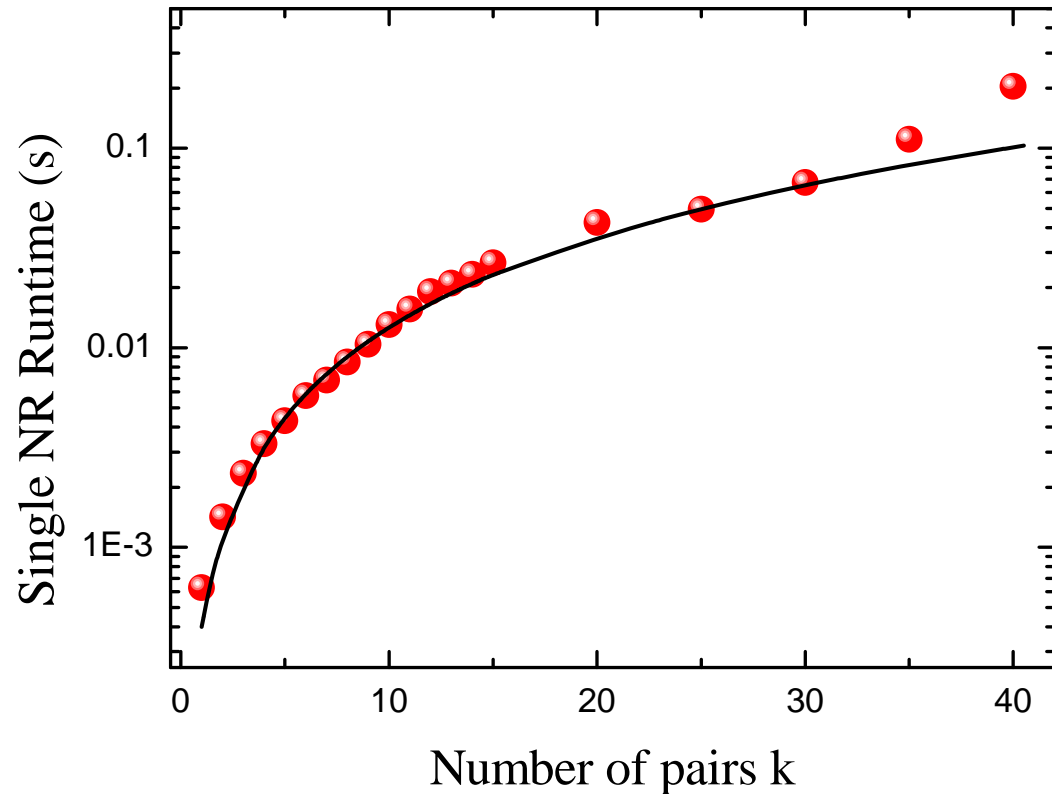
$k=7$; $n=5$;

6min

$k=5$; $n=10$;

40min

(Well beyond the BAE limits)



$n=5$

$$n=3, k=2 \quad 1d_{5/2} \quad 2s_{5/2} \quad 2d_{3/2}$$

BAEs:

$$\begin{cases} \frac{1}{2G} - \left(\frac{\rho_1}{x_1 - 2\epsilon_1} + \frac{\rho_2}{x_1 - 2\epsilon_2} + \frac{\rho_3}{x_1 - 2\epsilon_3} \right) - \frac{1}{x_1 - x_2} = 0, \\ \frac{1}{2G} - \left(\frac{\rho_1}{x_2 - 2\epsilon_1} + \frac{\rho_2}{x_2 - 2\epsilon_2} + \frac{\rho_3}{x_2 - 2\epsilon_3} \right) - \frac{1}{x_2 - x_1} = 0, \end{cases}$$

HS:

$$\begin{aligned} A(x) &= (x - 2\epsilon_1)(x - 2\epsilon_2)(x - 2\epsilon_3) & y_2(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2, \\ B(x)/A(x) &= \left(\frac{2\rho_1}{x - 2\epsilon_1} + \frac{2\rho_2}{x - 2\epsilon_2} + \frac{2\rho_3}{x - 2\epsilon_3} \right) - \frac{1}{G}. & V(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2. \end{aligned}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{G} - b_2 & 2 - b_1 + 2(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{G}) \\ 0 & 0 & -\frac{2}{G} - b_2 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{F} = (3 \times 3)$$